

Übungsblatt 1

Signalverarbeitung und Klassifikation

Abgabe online vor 11:30, 24. Mai 2017

Abgabe der schriftlichen Ausarbeitung vor der Vorlesung am 24. Mai 2017

Bonuspunkte für die Klausur werden nur vergeben,
wenn eine schriftliche Lösung aller Aufgaben (incl. Onlinefragen) abgegeben wurde.

Die Antworten auf die Onlinefragen können unter
<http://his.anthropomatik.kit.edu/Teaching/VorlesungKognitiveSysteme/websubmit/>
eingegeben werden.

Aufgabe 1: Faltung

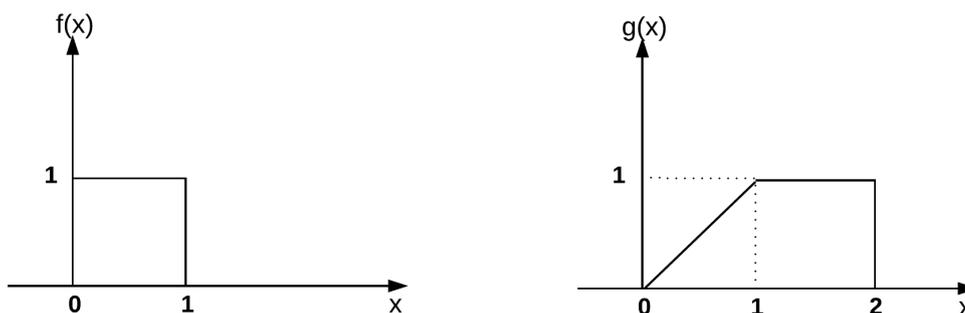


Abbildung 1: Faltung

- a) Bestimmen Sie die Faltung der Funktion $f(x)$ mit sich selbst ($f(x) * f(x)$) rechnerisch. Lösen Sie hierzu das Integral aus der Vorlesung, unter Ausnutzung einer geeigneten Fallunterscheidung:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

(1)

b) Bestimmen Sie $f(x) * g(x)$ grafisch.

c) Gegeben seien die beiden Funktionen $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < 3 \\ 0 & \text{für sonst} \end{cases}, \quad h(t) = \begin{cases} 3-t & \text{für } 0 \leq t < 3 \\ 6-t & \text{für } 3 \leq t < 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie grafisch die diskrete Faltung $u[t] = g[t] * h[t]$.

Onlinefrage Nr. 1: Was ist der größte Wert des Ergebnisses der Faltung $g[x] * h[x]$ aus Aufgabe c)?

- i) 1
- ii) 3
- iii) 6
- iv) 9
- v) 12

Aufgabe 2: Digitalisierung von Signalen

Gegeben sei das Signal $f(t) = \sin(2\pi 40t) + \cos(2\pi 20t)$.

Hinweise:

- Zur Vereinfachung sei in der Zeichnung die Höhe von $\delta = 1$
- Zur Fouriertransformation existieren diverse Konventionen! Lassen Sie sich davon nicht verwirren und verwenden Sie zur Lösung dieser Aufgabe die folgenden Informationen:

Funktion	Fouriertransformierte
$\sin(2\pi f_0 \cdot t)$	$\frac{i}{2}(\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0))$
$\cos(2\pi f_0 \cdot t)$	$\frac{1}{2}(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$	$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k/T)$

- a) Das Signal wird mit 60 Hz abgetastet. Zeichnen Sie das komplexe Spektrum des abgetasteten Signals $f(t)$, t in Sekunden. Berechnen Sie hierfür zunächst die Fouriertransformation, und tasten Sie anschließend durch Multiplikation mit dem Impulszug ab.

- b) Welches Phänomen tritt auf, wie kommt es dazu und wie kann verhindert werden, dass es auftritt?

- c) Zeichnen Sie das Betragsspektrum des mit 100 Hz abgetasteten Signals. Was beobachten Sie in Bezug auf das beschriebene Phänomen?
- d) Das Signal wird nun mit 80 Hz, dem doppelten der höchsten im Signal vorkommenden Frequenz, abgetastet. Zeichnen Sie das komplexe Spektrum.

Onlinefrage Nr. 2: Tritt das in Teilaufgabe b) beschriebene Phänomen in Teilaufgabe c) immernoch auf? Wenn ja, wie äußert es sich?

- i) tritt auf, führt zu sich auslöschenden Frequenzen
- ii) tritt auf, führt zu neu auftretenden Frequenzen
- iii) tritt auf, führt zu sich anderweitig überlagernden Frequenzen
- iv) tritt nicht auf

Aufgabe 3: Filtern

- a) Gegeben sei die Funktion $v(t) = \pi \cdot \delta(t) - \frac{\sin(3\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t)}{t}$ mit der Zeitvariablen t und $\omega_0 > 0$. Die Multiplikation ihrer Fouriertransformierten $V(\omega)$ mit der Fouriertransformierten eines Signals stellt einen Filter dar. Um welchen Filter handelt es sich dabei? Berechnen Sie für diese Aufgabe $V(\omega)$ und vereinfachen Sie in geeigneter Weise.

Hinweis:

Die Funktion $f(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ entspricht der Funktion $f(t) = \text{sinc}(t)$. Benutzen Sie als Fouriertransformierte von $g(t) = \text{sinc}(at)$ folgende Funktion: $G(\omega) = \frac{1}{|a|} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)$ mit $\text{rect}(t) = \begin{cases} 0, & |t| > \frac{1}{2} \\ 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

Onlinefrage Nr. 3: Um welches Filter handelt es sich in Aufgabe 3a)?

- i) Tiefpass
- ii) Hochpass
- iii) Bandpass
- iv) nichts davon

Aufgabe 4: Diskrete Fouriertransformation, Sampling

Die Frequenzauflösung der DFT hängt von der zeitlichen Auflösung ab. Je feiner die zeitliche Auflösung ist, desto gröber ist die Frequenzauflösung und umgekehrt. Berechnet man beispielsweise die DFT über einem gesamten Musikstück, so erhält man detaillierte Informationen über die auftretenden Frequenzen, dies jedoch nur kumuliert über das gesamte Musikstück hinweg. Berechnet man die DFT auf Basis von beispielsweise 100 Werten, so erhält man als Ergebnis ebenfalls 100 Werte. Da das Resultat der DFT symmetrisch ist, trägt nur die Hälfte der Werte Informationen. Somit verteilt sich die Frequenzinformation auf 50 Werte. Betrachten wir zur Verdeutlichung ein Beispiel mit unterschiedlichen Samplingraten, berechnen dabei die DFT aber stets auf Basis von 100 Samples:

Samplingrate	Grenzfrequenz	Frequenzauflösung	Zeitauflösung
1000 Hz	500 Hz	10 Hz	0.1 s
100 Hz	50 Hz	1 Hz	1 s
10 Hz	5 Hz	0.1 Hz	10 s

Es wird deutlich, dass die Frequenzauflösung in einem reziproken Verhältnis zur zeitlichen Auflösung steht.

- a) Berechnen Sie die Anzahl N der Samples, die benötigt werden, damit eine DFT eine Frequenzauflösung von 10 Hz erreichen kann, wenn ein Signal mit 22 kHz abgetastet wurde.

Onlinefrage Nr. 4: Welche zeitliche Auflösung wird benötigt, damit eine DFT eine Frequenzauflösung von 10 Hz erreichen kann, wenn ein Signal mit 22 kHz abgetastet wurde?

- i) 0.22 ms
- ii) 2.2 ms
- iii) 100 ms
- iv) 1 s